

CDF – CDF

Authored by
memjavad

November 13, 2025

RECOMMENDED CITATION

memjavad (2025). *CDF – CDF*. Spanish Psychological Databases. Retrieved from <https://spanish.arabpsychology.com/?p=4126>

Función de Distribución Acumulada (CDF)

Primary Disciplinary Field(s): Estadística, Teoría de la Probabilidad, Análisis Matemático.

1. Definición Central y Propósito

La **Función de Distribución Acumulada** (F.D.A.) o **Cumulative Distribution Function** (CDF) es un concepto fundamental dentro de la [Teoría de la Probabilidad](#) y la Estadística, cuyo propósito primordial es describir completamente la distribución de una variable aleatoria real. Esta función proporciona, para cualquier valor real x , la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual a x . En esencia, actúa como un mapa exhaustivo que permite cuantificar la probabilidad de observar un resultado dentro de un intervalo específico, ofreciendo una visión integral y acumulativa de cómo se dispersa la probabilidad a lo largo del rango de la variable. Su notación estándar es $F_X(x)$.

La CDF es crucial porque unifica el tratamiento de variables aleatorias, independientemente de si son discretas o continuas. Mientras que las variables discretas se describen comúnmente mediante la Función de Masa de Probabilidad (PMF) y las continuas mediante la Función de Densidad de Probabilidad (PDF), la CDF sirve como la descripción canónica que es aplicable a ambos tipos, así como a distribuciones mixtas. Su naturaleza acumulativa facilita el cálculo directo de probabilidades de eventos de la forma $P(X \leq x)$, simplificando análisis estadísticos complejos y proporcionando una base sólida para la inferencia y el modelado probabilístico, ya que elimina la necesidad de integración para variables continuas al calcular probabilidades de intervalos.

Formalmente, la CDF es una función no decreciente que va desde el dominio de los números reales hasta el intervalo cerrado $[0, 1]$. El valor cero se alcanza asintóticamente en el límite negativo infinito (indicando que es imposible que la variable tome un valor menor que ese), y el valor uno se alcanza en el límite positivo infinito (indicando certeza de que la variable tomará algún valor dentro de su dominio). Esta propiedad de acotamiento garantiza que la F.D.A. cumpla con los axiomas básicos de la probabilidad, asegurando la coherencia y validez de las distribuciones que representa en cualquier contexto matemático o aplicado.

2. Formulación Matemática

La definición formal de la Función de Distribución Acumulada, denotada habitualmente como $F_X(x)$, para una variable aleatoria X , se establece como la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a un valor dado x , y se expresa de la siguiente manera universal:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Aunque esta expresión es universal, su cálculo práctico difiere significativamente según la

naturaleza de la variable aleatoria, lo que subraya la versatilidad de la CDF como herramienta descriptiva. La elección entre sumatoria e integración define la forma específica que adquiere la función en la práctica estadística.

Para el caso de una variable aleatoria **discreta**, donde x_i son los posibles valores que X puede tomar con probabilidades $P(X = x_{\{i\}})$, la CDF se calcula sumando las probabilidades de masa (PMF) hasta el punto x . El resultado es una función escalonada que presenta saltos en cada valor discreto posible. La fórmula es:

$$F_X(x) = \sum_{x_{\{i\}} \leq x} P(X = x_{\{i\}})$$

Cada salto en esta función escalonada corresponde a la probabilidad asociada a ese punto, y la función permanece constante entre los valores discretos. Es fundamental notar que el valor de la función en el punto del salto incluye la probabilidad de ese punto, debido a la definición de "menor o igual".

Si X es una variable aleatoria **continua**, la CDF se obtiene integrando la Función de Densidad de Probabilidad (PDF), $f(t)$, desde menos infinito hasta el punto x . Este proceso de integración refleja la acumulación continua de probabilidad a lo largo del eje real, ya que la probabilidad de un punto exacto es cero. La expresión matemática es:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

En el caso continuo, la CDF es una función suave y continua, diferenciable en todos los puntos donde la PDF es continua, lo que permite la interconversión entre la densidad y la función acumulada mediante operaciones de cálculo diferencial e integral.

3. Características Clave y Axiomáticas

Toda función que represente una Función de Distribución Acumulada debe satisfacer tres propiedades axiomáticas que garantizan su consistencia con la teoría de la probabilidad. La primera y más fundamental es la **Monotonidad No Decreciente**. Para cualquier par de valores reales a y b tales que $a < b$, se debe cumplir que $F(a) \leq F(b)$. Esta característica es inherente a la naturaleza acumulativa de la función: a medida que el umbral x aumenta, la probabilidad acumulada nunca puede disminuir, solo puede permanecer igual o aumentar, ya que se incluyen más resultados posibles.

La segunda propiedad se refiere a los **Límites de Acotamiento**. La probabilidad debe estar confinada entre 0 y 1. Esto se formaliza mediante los límites en los extremos del dominio: el límite inferior es $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, lo que implica que la probabilidad de que la variable tome un valor menor que cualquier número arbitrariamente pequeño es cero; y el límite superior es $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, lo que asegura que la probabilidad de que la variable tome cualquier

valor dentro de su rango total es la certeza.

La tercera propiedad esencial es la **Continuidad por la Derecha**. Esto significa que para cualquier punto x_0 , el límite de la función a medida que x se aproxima a x_0 desde valores mayores es igual al valor de la función en x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$. Esta convención es crucial para el manejo riguroso de variables aleatorias discretas y mixtas. En los puntos de discontinuidad (los saltos de probabilidad en variables discretas), la convención de continuidad por la derecha asegura que la probabilidad del punto x_0 se incluya correctamente en $F(x_0)$, manteniendo la consistencia con la definición $P(X \leq x)$.

4. Interconexión con Funciones de Densidad y de Masa

La CDF no es simplemente una función descriptiva aislada, sino que está intrínsecamente ligada a la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) y la Función de Masa de Probabilidad (PMF). Esta interconexión permite a los estadísticos elegir la herramienta más conveniente para un análisis particular. La CDF actúa como el operador de acumulación, transformando una descripción local (PDF/PMF) en una descripción global (CDF).

En el dominio de las variables aleatorias **continuas**, la relación es inversa: la PDF es la derivada de la CDF. Asumiendo que $F(x)$ es diferenciable en x , se tiene que $f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x)$. Esta relación se deriva directamente del Teorema Fundamental del Cálculo, lo que significa que la PDF es la tasa de cambio de la probabilidad acumulada. Si se conoce la CDF, se puede recuperar la densidad de probabilidad en cualquier punto, facilitando la estimación de la probabilidad de eventos infinitesimales.

Para variables **discretas**, la PMF, $P(X=x_i)$, se puede obtener a partir de la CDF examinando los saltos. La probabilidad de que X sea exactamente igual a x_i es igual a la magnitud del salto de la CDF en ese punto. Formalmente, $P(X=x_i) = F(x_i) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x)$. Esta diferencia ilustra cómo la CDF encapsula toda la información probabilística, permitiendo la reconstrucción de la PMF. Esta capacidad de interconversión demuestra que la CDF es la forma más completa de especificar una distribución.

5. Importancia en Inferencia y Cuantiles

La utilidad práctica de la CDF se extiende profundamente en la estadística inferencial, siendo fundamental para el cálculo directo de probabilidades de intervalo, lo cual es la base de la toma de decisiones estadísticas. El cálculo de la probabilidad de que una variable caiga en un rango $(a, b]$ es directo: $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. Esta simplicidad es un gran avance sobre la necesidad de integrar la PDF, que sería requerida si solo se conociera la función de densidad.

Una aplicación crítica de la CDF es la definición de **cuantiles**. Los cuantiles dividen la distribución

en partes con probabilidades iguales. La función inversa de la CDF, conocida como la **función cuantil**, $Q(p) = F^{-1}(p)$, es fundamental. Esta función devuelve el valor x tal que la probabilidad acumulada hasta ese punto es p . Por ejemplo, la mediana es el cuantil $Q(0.5)$. En el ámbito financiero, la función cuantil se utiliza para calcular métricas de riesgo como el Valor en Riesgo (VaR), determinando el umbral de pérdida que solo se excede con una probabilidad mínima predefinida (e.g., $p=0.99$).

Además, la CDF es la piedra angular de las pruebas de bondad de ajuste no paramétricas. La **CDF empírica**, construida a partir de datos muestrales, se utiliza en pruebas como la [prueba de Kolmogórov-Smirnov](#) para comparar si la distribución de una muestra difiere significativamente de una distribución teórica postulada (cuya CDF es conocida). Al basar estas pruebas en la función acumulada, se evitan suposiciones sobre la forma específica de la distribución de la población, aumentando la robustez del análisis estadístico.

6. Contexto Histórico y Formalización

Si bien los conceptos de distribuciones de probabilidad han existido desde los inicios de la estadística moderna con figuras como De Moivre y Gauss, la formalización de la CDF como la descripción primaria y rigurosa de una distribución se atribuye al matemático ruso [Andréi Kolmogórov](#). En 1933, su obra *Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad* estableció el marco axiomático moderno que definió la probabilidad a través de la teoría de la medida.

Kolmogórov reconoció que la CDF era la herramienta más robusta para manejar todos los tipos de variables aleatorias (discretas, continuas y mixtas) bajo una única estructura matemática. Antes de esta formalización, la dependencia excesiva de la PDF y la PMF generaba ambigüedades, especialmente en los puntos de transición o al intentar demostrar teoremas de convergencia. La introducción de los axiomas de Kolmogórov y la adopción de la CDF como función principal proporcionaron la base necesaria para el desarrollo coherente de la estadística matemática moderna y la teoría de procesos estocásticos.

Este desarrollo histórico permitió que la estadística superara sus raíces descriptivas y entrara en una fase de análisis riguroso, donde conceptos como la distribución de probabilidad convergente (convergencia en distribución) se definen directamente a través de la convergencia de sus CDF. Por lo tanto, la CDF no es solo una herramienta descriptiva, sino el lenguaje fundamental para la teoría límite y la inferencia asintótica.

7. Extensiones y Conceptos Relacionados

Dada la centralidad de la CDF, se han desarrollado varias extensiones para abordar problemas estadísticos específicos o para simplificar el análisis en dominios particulares. Una extensión común es la **Función de Distribución Acumulada Complementaria (CCDF)**, o función de

supervivencia, definida como $S(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$. Esta función es esencial en el análisis de supervivencia y la ingeniería de fiabilidad, donde el enfoque se centra en la probabilidad de que un elemento (como un componente mecánico o un paciente) sobreviva o exceda un tiempo o umbral específico x .

Otra extensión crucial es el uso de **Cóputas** en la estadística multivariada. Cuando se trabaja con múltiples variables aleatorias, la CDF conjunta $F_{\{X_1, \dots, X_n\}}(x_1, \dots, x_n)$ se vuelve extremadamente difícil de modelar. Las cóputas, basadas en el [Teorema de Sklar](#), permiten separar la estructura de dependencia entre las variables de sus distribuciones marginales individuales. La cóputa es esencialmente la CDF conjunta de las transformaciones uniformes de las variables originales, facilitando el modelado de la dependencia, lo cual es vital en campos como el análisis de riesgo financiero y la ingeniería.

Finalmente, la noción de la CDF se extiende al concepto de **Distribuciones Empíricas**. La CDF empírica, $\hat{F}_n(x)$, es la función de distribución acumulada construida directamente a partir de una muestra de n observaciones. Esta función es un estimador no paramétrico de la verdadera CDF subyacente de la población y converge a la CDF teórica a medida que el tamaño de la muestra aumenta, lo que demuestra la robustez y la aplicabilidad de este concepto en la práctica de la recopilación y el análisis de datos.

8. Lecturas Adicionales

[Función de distribución \(Wikipedia en español\)](#)

[Andréi Kolmogórov \(Wikipedia en español\)](#)

[Función de densidad de probabilidad \(Wikipedia en español\)](#)

[Cumulative Distribution Function - StatLect](#)