

# Distribución de Bernoulli – Bernoulli distribution

Authored by  
**memjavad**

November 7, 2025

## RECOMMENDED CITATION

memjavad (2025). *Distribución de Bernoulli – Bernoulli distribution*. Spanish Psychological Databases. Retrieved from <https://spanish.arabpsychology.com/?p=3133>

## Distribución de Bernoulli

**Primary Disciplinary Field(s):** Estadística, Probabilidad, Teoría de la Información.

### 1. Introducción y Definición Fundamental

La **Distribución de Bernoulli** es una de las distribuciones de probabilidad más fundamentales y sencillas dentro de la estadística matemática. Modela un experimento aleatorio que solo puede tener dos resultados mutuamente excluyentes y exhaustivos, convencionalmente denominados "éxito" y "fracaso". Este tipo de experimento unitario se conoce formalmente como un [Ensayo de Bernoulli](#). La esencia de esta distribución radica en su simplicidad binaria, sirviendo como el bloque de construcción primordial para distribuciones más complejas que manejan múltiples ensayos, como la **Distribución Binomial**.

Formalmente, una variable aleatoria discreta  $X$  sigue una Distribución de Bernoulli si su conjunto de valores posibles es  $S = \{0, 1\}$ , donde 1 representa el éxito y 0 representa el fracaso. La probabilidad de éxito se denota típicamente por  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ), y consecuentemente, la probabilidad de fracaso es  $1 - p$ , denotada a menudo como  $q$ . Es crucial entender que, para que un evento pueda ser modelado por esta distribución, las condiciones del ensayo deben ser fijas y la probabilidad  $p$  debe ser constante. Ejemplos clásicos incluyen el lanzamiento de una moneda (cara o cruz) o la respuesta a una pregunta binaria (sí o no).

A pesar de su estructura mínima, el poder de la Distribución de Bernoulli reside en su capacidad para abstraer y cuantificar la incertidumbre de cualquier fenómeno dicotómico. En esencia, cualquier proceso de toma de decisiones o resultado experimental que pueda reducirse a una elección binaria puede ser descrito mediante este modelo probabilístico. Esto abarca desde el control de calidad industrial (producto defectuoso o no defectuoso) hasta modelos predictivos en inteligencia artificial (clasificación binaria). La comprensión profunda de esta distribución es indispensable para el estudio de la inferencia estadística y los procesos estocásticos más avanzados.

### 2. Función de Masa de Probabilidad (FMP) y Parámetros

La Distribución de Bernoulli está completamente caracterizada por un único parámetro,  $p$ , la probabilidad de éxito. La Función de Masa de Probabilidad (FMP)  $P(X=x)$  describe la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tome un valor específico  $x$  in  $\{0, 1\}$ . Esta función se expresa de manera concisa y elegante, aprovechando la naturaleza discreta del conjunto de resultados. Matemáticamente, la FMP para una Distribución de Bernoulli se define como:

$$P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad \text{para } x \in \{0, 1\}$$

Esta formulación compacta permite calcular ambas probabilidades: si  $x=1$  (éxito), la expresión se simplifica a  $p^1 (1-p)^0 = p$ . Si  $x=0$  (fracaso), la expresión se simplifica a  $p^0 (1-p)^1 = 1-p$ . Esta función asegura que la suma total de las probabilidades sobre el espacio muestral sea igual a la unidad, ya que  $P(X=1) + P(X=0) = p + (1-p) = 1$ , cumpliendo así con los axiomas fundamentales de la probabilidad. El parámetro  $p$  actúa como el núcleo informativo de la distribución, ya que cualquier cambio en  $p$  altera directamente la forma de la distribución, aunque esta siempre permanezca restringida a los dos puntos del eje  $x$ .

Es importante distinguir la FMP de Bernoulli de las funciones de densidad utilizadas en distribuciones continuas. Al ser una distribución discreta, la FMP solo tiene "picos" de probabilidad en los puntos 0 y 1. La visualización gráfica de esta distribución es trivialmente simple: dos barras verticales, una de altura  $p$  en  $x=1$  y otra de altura  $1-p$  en  $x=0$ . La interpretación del parámetro  $p$  es fundamental en la práctica; si  $p$  es alto (cercano a 1), el resultado esperado es el éxito, mientras que si  $p$  es bajo (cercano a 0), el fracaso es el resultado más probable. La condición de simetría se alcanza solo cuando  $p = 0.5$ , como en el caso ideal de un lanzamiento de moneda no sesgada.

### 3. Propiedades Estadísticas Clave

Las propiedades estadísticas de la Distribución de Bernoulli, especialmente su esperanza matemática (media) y su varianza, son notablemente simples y están directamente relacionadas con el parámetro  $p$ . Estas propiedades son esenciales para derivar las características de distribuciones más complejas que se basan en ensayos de Bernoulli repetidos.

La **Esperanza Matemática** (o valor esperado),  $E$ , representa el promedio de los resultados si el ensayo se repitiera un número infinito de veces. Para una variable aleatoria de Bernoulli, la esperanza es igual a la probabilidad de éxito,  $p$ . Esto se calcula mediante la definición de esperanza para variables discretas:

$$E = \sum x \cdot P(X=x) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

La interpretación de este resultado es intuitiva: dado que el resultado solo puede ser 0 o 1, el valor promedio a largo plazo debe ser la probabilidad de obtener 1. Por otro lado, la **Varianza**,  $\text{Var}(X)$ , mide la dispersión o la variabilidad de los resultados alrededor de la media. Para una Distribución de Bernoulli, la varianza es el producto de la probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso,  $p(1-p)$ .

$$\text{Var}(X) = E - (E)^2. \text{ Dado que } X^2 = X \text{ para } x \in \{0, 1\}, E = p.$$

$$\text{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p).$$

La varianza alcanza su valor máximo cuando  $p = 0.5$ , lo que refleja el punto de máxima

incertidumbre o máxima variabilidad. Cuando  $p$  se acerca a 0 o a 1, la varianza disminuye, indicando que el resultado es cada vez más predecible. Por ejemplo, si  $p=0.99$ , la varianza es muy baja, ya que el resultado 1 (éxito) es casi seguro. La desviación estándar, que es la raíz cuadrada de la varianza, proporciona una medida de dispersión en las mismas unidades que la variable aleatoria. Estas propiedades estadísticas son cruciales no solo para la comprensión teórica, sino también para la estimación de parámetros en modelos estadísticos aplicados, donde  $p$  debe ser inferido a partir de datos muestrales.

#### 4. Contexto Histórico y Etimología

El nombre de la distribución rinde homenaje al matemático suizo [Jacob Bernoulli](#) (1654-1705), quien sentó las bases de la moderna teoría de la probabilidad. Aunque Bernoulli no formuló la distribución en su notación actual, los principios que la sustentan fueron desarrollados exhaustivamente en su obra póstuma fundamental, [Ars Conjectandi](#) (El Arte de Conjeturar), publicada en 1713 por su sobrino Nicholas.

El trabajo de Bernoulli buscaba formalizar la probabilidad más allá de los juegos de azar, aplicándola a problemas cívicos, económicos y morales. El concepto clave que desarrolló fue el de una secuencia de ensayos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.), donde cada ensayo tiene solo dos posibles resultados. Estos ensayos, hoy conocidos como Ensayos de Bernoulli, fueron la base para la derivación de la **Ley de los Grandes Números**, un resultado fundamental también contenido en *Ars Conjectandi*. La distribución moderna de Bernoulli, tal como se enseña hoy, es la formalización matemática del resultado de un solo ensayo de este tipo.

La importancia histórica de *Ars Conjectandi* no puede subestimarse, ya que marcó la transición de la probabilidad como un conjunto de reglas empíricas a una rama rigurosa de las matemáticas. Aunque la Distribución Binomial (que modela  $n$  ensayos de Bernoulli) fue el foco principal del análisis de Jacob Bernoulli, la Distribución de Bernoulli se reconoce retrospectivamente como el caso más simple y unitario ( $n=1$ ). Este legado subraya cómo los conceptos básicos de la probabilidad, aunque simples en su expresión final, requirieron un esfuerzo intelectual significativo para ser separados y definidos formalmente en el contexto del desarrollo de la estadística moderna durante los siglos XVII y XVIII.

#### 5. Relación con Otras Distribuciones de Probabilidad

La Distribución de Bernoulli no solo es importante por sí misma, sino también porque actúa como el cimiento sobre el cual se construyen varias otras distribuciones de probabilidad discretas esenciales. Esta relación jerárquica subraya su papel fundamental en la teoría estadística.

La conexión más directa e importante es con la **Distribución Binomial**, denotada  $B(n, p)$ . Una variable aleatoria binomial modela el número total de éxitos en una secuencia fija de  $n$  ensayos

de Bernoulli independientes. Por lo tanto, una Distribución de Bernoulli es simplemente un caso especial de la Distribución Binomial donde el número de ensayos es  $n=1$ . Si  $X_i$  son  $n$  variables aleatorias de Bernoulli i.i.d. con parámetro  $p$ , entonces la suma  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  sigue una distribución Binomial  $B(n, p)$ . Esta relación permite que las propiedades de Bernoulli (como la esperanza y la varianza) se generalicen fácilmente a la Binomial, donde  $E = np$  y  $\text{Var}(Y) = np(1-p)$ .

Además, la Distribución de Bernoulli está intrínsecamente ligada a la **Distribución Geométrica** y la **Distribución Binomial Negativa**. La Distribución Geométrica modela el número de ensayos de Bernoulli (i.i.d.) necesarios para obtener el primer éxito. Cada ensayo individual dentro de esta secuencia es, por definición, un ensayo de Bernoulli. La Binomial Negativa, por su parte, generaliza esto modelando el número de ensayos necesarios para alcanzar un número  $r$  de éxitos. En todos estos casos, la independencia y la naturaleza binaria de cada paso individual provienen directamente de las condiciones impuestas por el Ensayo de Bernoulli.

Finalmente, la Distribución de Bernoulli también se relaciona, bajo ciertas condiciones límite, con la **Distribución de Poisson** y la **Distribución Normal**. Si  $n$  es muy grande y  $p$  es muy pequeño (manteniendo  $np$  constante), la Binomial (y por extensión, la suma de los ensayos de Bernoulli) puede aproximarse mediante la Distribución de Poisson. Si  $n$  es grande y  $p$  no es extremo, la Binomial tiende a la Distribución Normal, lo cual es una manifestación del **Teorema Central del Límite** aplicado a la suma de variables aleatorias independientes de Bernoulli.

## 6. Aplicaciones Prácticas y Ejemplos

Dada su naturaleza fundamental, la Distribución de Bernoulli encuentra aplicaciones vastas y transversales en campos que requieren modelar resultados binarios. Su utilidad reside en proporcionar un marco probabilístico simple para escenarios donde la decisión o el resultado es categórico.

En el ámbito de la **Ingeniería y Control de Calidad**, la distribución se utiliza para modelar si un componente fabricado es conforme (éxito,  $X=1$ ) o defectuoso (fracaso,  $X=0$ ). Aquí,  $p$  representa la tasa histórica de no defectos. En las **Ciencias Biológicas y Medicina**, los ensayos de Bernoulli se aplican para modelar resultados de pruebas médicas (positivo o negativo), la supervivencia de un paciente (vive o muere) después de un tratamiento, o la presencia de una característica genética específica. Cada paciente o muestra representa un ensayo de Bernoulli independiente.

En el campo de la **Informática y Machine Learning**, la distribución es omnipresente, especialmente en la clasificación binaria. Los modelos de regresión logística, por ejemplo, estiman la probabilidad  $p$  de que una entrada pertenezca a una clase (por ejemplo, spam o no spam). La salida de estos modelos, después de la aplicación de una función sigmoide, es precisamente el

parámetro  $p$  de una distribución de Bernoulli. Además, en la Teoría de la Información, los bits (0 o 1) en la transmisión de datos pueden modelarse como resultados de Bernoulli, lo que ayuda a calcular la entropía y la capacidad de los canales de comunicación. Incluso en **Finanzas**, se utiliza para modelar eventos de incumplimiento de pago (default) o movimientos direccionales del mercado (subida o bajada).

La implementación práctica de la distribución de Bernoulli a menudo implica el uso de estimadores de máxima verosimilitud para determinar el parámetro  $p$  a partir de datos observados. Si se observan  $k$  éxitos en  $N$  ensayos, la estimación de máxima verosimilitud de  $p$  es simplemente  $\hat{p} = k/N$ . Esta simplicidad en la estimación contribuye a la amplia adopción del modelo en situaciones donde la recolección de datos es costosa o limitada, pero la naturaleza del resultado es claramente dicotómica.

## 7. Importancia y Consideraciones Finales

La Distribución de Bernoulli es de una importancia teórica inmensa, no solo como un modelo de probabilidad, sino como una herramienta conceptual que permite la construcción de modelos estadísticos más complejos. Es la representación más pura y mínima de la aleatoriedad dicotómica. Su estudio es el primer paso en la modelización de procesos aleatorios, y su comprensión es esencial para cualquier disciplina que dependa de la estadística.

No obstante, la distribución tiene una limitación inherente: solo modela un único evento. Si el interés es el número de éxitos en una serie de eventos, se debe recurrir a la Distribución Binomial. Si el interés se centra en el tiempo o el número de intentos hasta el primer éxito, se utilizan las distribuciones Geométrica o Exponencial. La Distribución de Bernoulli, al ser discreta y simple, no puede modelar fenómenos continuos o resultados con más de dos categorías, lo que requiere la transición a distribuciones multinomiales o continuas.

En conclusión, la Distribución de Bernoulli, legado directo de Jacob Bernoulli, permanece como una piedra angular de la probabilidad. Su elegancia matemática y su capacidad para capturar la esencia de la incertidumbre binaria aseguran su permanencia como una herramienta fundamental en la estadística aplicada, la investigación científica y la ingeniería, proporcionando la base para la inferencia y la predicción en un mundo lleno de decisiones de sí o no.

## Further Reading

[Distribución de Bernoulli \(Wikipedia\)](#)

[Jakob Bernoulli \(Wikipedia\)](#)

[Ars Conjectandi \(Wikipedia\)](#)

[Distribución Binomial \(Wikipedia\)](#)